МЕТРОЛОГИЯ, СТАНДАРТИЗАЦИЯ и СЕРТИФИКАЦИЯ

ЗАДАНИЕ 3

Статистическое представление данных

В результате n измерений физической величины Q найдено ее среднее арифметическое значение $\overline{Q}$ и рассчитан один из двух параметров: 1) среднеквадратическое отклонение результатов измерений σ или 2) оценка среднеквадратического отклонения результатов S_σ.

Найдите доверительный интервал значений величины Q с доверительной вероятностью P. Точность расчетов – до трех десятичных знаков.

Результат решения представьте в виде $Q_p \in [Q_{p\,\min}; Q_{p\,\max}]$.

Варианты задания

	0	**10**	**20**
0		$\overline{Q} = 3{,}15$; $P = 0{,}80$; $S_\sigma = 0{,}02$; $n = 20$	$\overline{Q} = 37{,}19$; $P = 0{,}98$; $\sigma = 1{,}12$; $n = 61$
1	$\overline{Q} = 5{,}28$; $P = 0{,}95$; $S_\sigma = 0{,}50$; $n = 10$	$\overline{Q} = 18{,}08$; $P = 0{,}99$; $\sigma = 0{,}95$; $n = 16$	$\overline{Q} = 61{,}81$; $P = 0{,}90$; $S_\sigma = 0{,}62$; $n = 41$
2	$\overline{Q} = 14{,}34$; $P = 0{,}98$; $\sigma = 1{,}10$; $n = 29$	$\overline{Q} = 75{,}14$; $P = 0{,}95$; $S_\sigma = 1{,}17$; $n = 13$	$\overline{Q} = 84{,}13$; $P = 0{,}80$; $\sigma = 0{,}94$; $n = 9$
3	$\overline{Q} = 63{,}45$; $P = 0{,}90$; $S_\sigma = 0{,}56$; $n = 20$	$\overline{Q} = 14{,}78$; $P = 0{,}95$; $\sigma = 1{,}61$; $n = 25$	$\overline{Q} = 37{,}21$; $P = 0{,}99$; $S_\sigma = 0{,}89$; $n = 27$
4	$\overline{Q} = 74{,}65$; $P = 0{,}98$; $\sigma = 2{,}35$; $n = 61$	$\overline{Q} = 79{,}82$; $P = 0{,}95$; $S_\sigma = 1{,}48$; $n = 25$	$\overline{Q} = 17{,}94$; $P = 0{,}90$; $\sigma = 1{,}38$; $n = 24$
5	$\overline{Q} = 47{,}14$; $P = 0{,}99$; $S_\sigma = 0{,}59$; $n = 16$	$\overline{Q} = 87{,}43$; $P = 0{,}98$; $\sigma = 1{,}18$; $n = 27$	$\overline{Q} = 29{,}24$; $P = 0{,}95$; $S_\sigma = 0{,}52$; $n = 17$
6	$\overline{Q} = 19{,}25$; $P = 0{,}80$; $\sigma = 0{,}15$; $n = 5$	$\overline{Q} = 24{,}67$; $P = 0{,}98$; $S_\sigma = 0{,}57$; $n = 17$	$\overline{Q} = 54{,}47$; $P = 0{,}95$; $\sigma = 1{,}11$; $n = 23$
7	$\overline{Q} = 65{,}24$; $P = 0{,}90$; $S_\sigma = 1{,}45$; $n = 19$	$\overline{Q} = 98{,}20$; $P = 0{,}99$; $\sigma = 1{,}15$; $n = 13$	$\overline{Q} = 184{,}28$; $P = 0{,}98$; $S_\sigma = 4{,}15$; $n = 31$
8	$\overline{Q} = 63{,}51$; $P = 0{,}99$; $\sigma = 1{,}18$; $n = 29$	$\overline{Q} = 68{,}09$; $P = 0{,}95$; $S_\sigma = 1{,}25$; $n = 17$	$\overline{Q} = 9{,}78$; $P = 0{,}80$; $\sigma = 0{,}95$; $n = 21$
9	$\overline{Q} = 58{,}94$; $P = 0{,}90$; $S_\sigma = 1{,}76$; $n = 24$	$\overline{Q} = 52{,}34$; $P = 0{,}98$; $\sigma = 0{,}77$; $n = 30$	$\overline{Q} = 38{,}71$; $P = 0{,}99$; $S_\sigma = 1{,}01$; $n = 8$

Элементы теории

Среднее арифметическое измеренной физической величины Q (наружного диаметра детали, ширины шпоночного паза, угла наклона образующей конической поверхности и т.д.)

$$\overline{Q} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Q_i \,, \tag{3.1}$$

где n – число измерений (количество деталей в выборке); Q_i – результат отдельного измерения.

В случае *нормального закона распределения* совокупности данных дисперсия (разброс) величины Q характеризуется *среднеквадратическим отклонением*

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \overline{Q})^2} \,. \tag{3.2}$$

В других случаях используется *оценка среднеквадратического отклонения* результатов измерений

$$S_\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - \overline{Q})^2} \,. \tag{3.3}$$

Из всего массива данных выделяют *доверительный интервал* Q_p – сравнительно узкий диапазон наиболее достоверных результатов измерения физической величины Q. Вероятность P попадания отдельного результата в доверительный интервал называют *доверительной вероятностью*.

Доверительный интервал симметричен относительно центра группирования результатов (среднего арифметического $\overline{Q}$) и описывается зависимостью

$$Q_p = \overline{Q} \pm \delta_p \,, \tag{3.4}$$

где δ_p – граница доверительного интервала.

Если определено среднеквадратическое отклонение σ, то

$$\delta_p = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha(P) \,, \tag{3.5}$$

где $z_\alpha(P)$ – квантиль нормального распределения для вероятности P (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Квантили нормального распределения (*z*-распределения)

P	**0,80**	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
$z_\alpha(P)$	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Если определена оценка среднеквадратического отклонения S_σ, то конфигурация выражения для расчета δ_p зависит от числа измерений n:

– при $n > 30$

$$\delta_p = \frac{S_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot z_\alpha(P); \quad (3.6)$$

– при $n \leq 30$

$$\delta_p = \frac{S_\sigma}{\sqrt{n}} \cdot t(k,P), \quad (3.7)$$

где $t(k,P)$ – табличное значение квантиля распределения Стьюдента, определяемое в зависимости от числа степеней свободы k и доверительной вероятности P (табл. 3.2).

Число степеней свободы массива данных

$$k = n - 1. \quad (3.8)$$

Таблица 3.2. Квантили распределения Стьюдента (*t*-распределения)

k	***P***				
	0,80	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787

26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
50	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660

Пример выполнения задания

Исходные данные

Среднее арифметическое измеренной физической величины $\overline{Q} = 29{,}24$; оценка среднеквадратического отклонения физической величины $S_\sigma = 0{,}52$; число измерений $n = 16$; доверительная вероятность $P = 0{,}95$.

Решение

№ п/п	Рассчитываемая величина	Обозначение	Формула или номер формулы	Результат расчета
1	Число степеней свободы массива данных	k	(3.8)	15
2	Квантиль распределения Стьюдента	$t(k, P)$	табл. 3.2	2,131
3	Граница доверительного интервала	δ_p	(3.7)	0,277
5	Наименьшее доверительное значение физической величины	$Q_{p\,\min}$	(3.4)	28,963
6	Наибольшее доверительное значение физической величины	$Q_{p\,\max}$		29,517

***Ответ*:** $Q_p \in [28{,}963;\ 29{,}517]$

Контрольные вопросы

1. Какой из квантилей распределения Стьюдента больше: $t(26;\ 0{,}99)$ или $t(4;\ 0{,}95)$?

2. Два массива данных с выборками $n_1 < n_2$ имеют одинаковые среднеквадратические отклонения $\sigma_1 = \sigma_2$. У какой физической величины (Q_1 или Q_2) более узкие границы доверительного интервала при одинаковой доверительной вероятности?